DOI:10.19473/j.cnki.1008-4940.2018.02.011

交换半环上全矩阵代数的局部 Jordan 导子

庄金洪

（福建商学院　基础部，福建　福州，350012）

摘　要　探讨了交换半环上全矩阵代数的局部 Jordan 导子的刻画问题。令 R 表示 2-非挠的交换半环，证明了 R 上的全矩阵代数 $M_n(R)$ 上的每个局部 Jordan 导子都是内导子。

[关键词]　交换半环；全矩阵代数；Jordan 导子；局部 Jordan 导子；内导子

[中图分类号]　O152. 3　　**[文献标识码]**　A　　**[文章编号]**　2096-3300（2018）02-0065-05

1. 引言与预备知识

关于 Jordan 导子的研究一直是国内外众多学者关注的热点问题，其中“Jordan 导子什么时候退化成导子”已被许多学者讨论。由局部 Jordan 导子的定义可知，Jordan 导子一定是局部 Jordan 导子，局部 Jordan 导子不一定是 Jordan 导子。而近来，赵延霞[1]通过对交换幺环上全矩阵代数的 Jordan 导子和局部 Jordan 导子的研究，证明了交换幺环上的全矩阵代数上的每一个 Jordan 导子都是内导子，每一个局部 Jordan 导子也都是内导子。对于交换半环上全矩阵代数的局部 Jordan 导子是否也有类似的结论呢？本文的研究旨在解决这个问题，并得到肯定的答案。

定义 1[2]：半环 $R=(R,+,\cdot,0,1)$ 是满足下列性质的一种代数结构：

（1）$(R,+,0)$ 是一个交换幺半群；

（2）$(R,\cdot,1)$ 是一个幺半群；

（3）对任意的 $a,b,c\in R$，均有 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$，$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$；

（4）$\forall a\in R$，$0\cdot a=a\cdot 0=0$；

（5）$0\neq 1$。

半环 R 称为交换半环，如果 $\forall a,b\in R$，均有 $ab=ba$。

半环 R 称为 2-非挠的，如果对于任意的 $a,b\in R$，如果 $2a=2b$，那么 $a=b$。

定义 2[2]：设 R 是一个半环，$(M,+,0_M)$ 是一个可交换的幺半群，如果存在一个映射：$R\times M\to M,(r,m)\to rm$，对于 $\forall r,r'\in R,m,m'\in M$，满足：

（1）$r(m+m')=rm+rm'$；

（2）$(r+r')m=rm+r'm$；

（3）$(rr')m=r(r'm)$；

（4）$1_Rm=m$；

收稿日期： 2017-10-12

基金项目： 福建省教育厅中青年教师科研项目“半环上全矩阵代数 Jordan 导子的若干研究”（JAT160579）。

作者简介： 庄金洪（1982-），男，福建莆田人，讲师，硕士，研究方向：矩阵代数。

(5) $r0_M = 0_M = 0_R m$；

则称 M 为左 R-半模。

定义 3[3]：设 R 是一个交换半环，$(A, +, \cdot, 0, 1)$ 是一个半环。如果 $(A, +, 0)$ 是一个左 R-半模，且满足 $\forall r \in R, x, y \in A$，均有 $r(xy) = x(ry)$，则称 A 是 R 上的一个代数。

定义 4[4]：设 R 是一个交换半环，$M_n(R)$ 是由 R 上所有 n 阶矩阵构成的集合。对于 $A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij}) \in M_n(R)$，$a \in R$，定义 $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n\times n}$，$A \cdot B = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj})_{n\times n}$，$aA = (aa_{ij})_{n\times n}$。

不难验证，$(M_n(R), +, O_n)$ 对于纯量乘法构成一个左 R-半模，称为交换半环 R 上的矩阵半模，其中零元 O_n 是 n 阶零矩阵。而 $(M_n(R), +, \cdot, O_n, I_n)$ 是交换半环 R 上的一个代数，称为交换半环 R 的全矩阵代数。本文将第 (i, j) 处元素为 1、其它位置的元素均为 0 的 $n \times n$ 矩阵记作 e_{ij}。

定义 5[4]：设 R 是一个半环，$r \in R$，如果在 R 中存在一个元素 s 使得 $r + s = 0$，则称 r 为半环 R 的一个可反元，此时称 s 为 r 的一个反元。

容易验证，可反元 r 的反元是唯一的，记为 $-r$。设 $a, b \in R$，b 是 R 的可反元，定义 $a - b = a + (-b)$。

定义 6[4]：设 R 是一个交换半环，$M = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(R)$，如果 M 中的每一个元素 a_{ij} 都是 R 中的可反元，那么称 M 在 $M_n(R)$ 中是可反的，这时称 $(-a_{ij})_{n\times n}$ 为 M 的反矩阵，记为 $-M$。

定义 7：设 A 是 R 上的一个代数。

(1) 对于线性映射 $\delta: A \to A$，如果对于 $\forall a, b \in A$，均有 $\delta(ab + ba) = \delta(a)b + a\delta(b) + \delta(b)a + b\delta(a)$，则称 δ 是一个 Jordan 导子。

(2) 对于线性映射 $\delta_a: A \to A$，如果对于 $\forall a \in A$，存在一个仅依靠于 a 的 Jordan 导子 δ_a，使得 $\delta(a) = \delta_a(a)$，则称 δ_a 是一个局部 Jordan 导子。

2. 主要结果及其证明

引理 1[4]：设 R 是一个 2-非挠的交换半环，A 是半环 R 上的一个代数，δ 是 A 上的一个 Jordan 导子。那么对于 $\forall a \in A$，均有 $\delta(a^2) = \delta(a)a + a\delta(a)$。

引理 2：设 R 是一个 2-非挠的交换半环，δ 是 $M_n(R)$ 上的一个局部 Jordan 导子。

(1) 如果 E 是 $M_n(R)$ 上的一个幂等元，那么 $\delta(E) = \delta(E)E + E\delta(E)$。

(2) 如果 $E^3 = E$，$E \in M_n(R)$，那么 $\delta(E) = \delta(E)E^2 + E\delta(E)E + E^2\delta(E)$。

证明：(1) 如果 E 是 $M_n(R)$ 上的一个幂等元，那么 $E = E^2$。因为 δ 是 $M_n(R)$ 上的一个局部 Jordan 导子，那么存在一个仅依靠于 E 的 Jordan 导子 δ_E，使得 $\delta(E) = \delta_E(E)$。因此，由引理 2.1 有：

$$\delta(E) = \delta_E(E) = \delta_E(E^2) = \delta_E(E)E + E\delta_E(E) = \delta(E)E + E\delta(E)。$$

(2) 因为 δ 是 $M_n(R)$ 上的一个局部 Jordan 导子，那么存在一个仅依靠于 E 的 Jordan 导子 δ_E，使得 $\delta(E) = \delta_E(E)$。如果 $E = E^3$，那么：

$\delta_E(E \cdot E^2 + E^2 \cdot E)$

$= \delta_E(E) \cdot E^2 + E\delta_E(E^2) + \delta_E(E^2)E + E^2\delta_E(E)$ (Jordan 导子的定义)

$= \delta_E(E) \cdot E^2 + E(\delta_E(E)E + E\delta_E(E)) + (\delta_E(E)E + E\delta_E(E))E + E^2\delta_E(E)$ (由引理 2.1)

$= \delta_E(E) \cdot E^2 + E\delta_E(E)E + E^2\delta_E(E) + \delta_E(E)E^2 + E\delta_E(E)E + E^2\delta_E(E)$

$= 2(\delta_E(E) \cdot E^2 + E\delta_E(E)E + E^2\delta_E(E))$

而 $\delta_E(E \cdot E^2 + E^2 \cdot E) = \delta_E(2E^3) = 2\delta_E(E^3)$，所以 $2\delta_E(E^3) = 2(\delta_E(E) \cdot E^2 + E\delta_E(E)E + E^2\delta_E(E))$。由于 R 是一个 2-非挠的交换半环，所以 $\delta_E(E^3) = \delta_E(E) \cdot E^2 + E\delta_E(E)E + E^2\delta_E(E)$。

因此，$\delta(E) = \delta_E(E) = \delta_E(E^3) = \delta_E(E) \cdot E^2 +$

$E\delta_E(E)E+E^2\delta_E(E)=\delta(E)\cdot E^2+E\delta(E)E+E^2\delta(E)$。

引理 3[4]：设 R 是一个 2-非挠的交换半环，且 R 中不存在非零的加法幂等元，δ 是 $M_n(R)$ 上的一个 Jordan 导子，同时记 $\delta(e_{ij})=(a_{kl}^{(ij)})_{n\times n}$，$i, j=1, 2, \cdots, n$，其中 $a_{kl}^{(ij)}\in R$。那么有：

$$\delta(e_{ij})=\begin{cases}\sum\limits_{k=1,\ k\neq i}^{n}a_{ki}^{(ii)}e_{ki}+\sum\limits_{l=1,\ l\neq i}^{n}a_{il}^{(ii)}e_{il} & i=j\\ \sum\limits_{k=1,\ k\neq i}^{n}a_{ki}^{(ii)}e_{kj}+\sum\limits_{l=1,\ l\neq j}^{n}a_{jl}^{(jj)}e_{il}+a_{ij}^{(ij)}e_{ij} & i\neq j\end{cases}$$

引理 4：设 R 是一个 2-非挠的交换半环，δ 是 $M_n(R)$ 上的一个局部 Jordan 导子，同时记 $\delta(e_{ii})=(a_{kl}^{(ii)})_{n\times n}$，$i=1, 2, \cdots, n$，其中 $a_{kl}^{(ii)}\in R$，那么 $\delta(e_{ii})=\sum\limits_{k=1,\ k\neq i}^{n}a_{ki}^{(ii)}e_{ki}+\sum\limits_{l=1,\ l\neq i}^{n}a_{il}^{(ii)}e_{il}$。

证明：因为 $e_{ii}=e_{ii}^2$，由引理 2 得：$\delta(e_{ii})=\delta(e_{ii})e_{ii}+e_{ii}\delta(e_{ii})=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}^{(ii)}e_{ki}+\sum\limits_{l=1}^{n}a_{il}^{(ii)}e_{il}$。

对比等式两边，有：$a_{ii}^{(ii)}=a_{ii}^{(ii)}+a_{ii}^{(ii)}$，再由 R 的条件，可得：$a_{ii}^{(ii)}=0$。

所以 $\delta(e_{ii})=\sum\limits_{k=1,\ k\neq i}^{n}a_{ki}^{(ii)}e_{ki}+\sum\limits_{l=1,\ l\neq i}^{n}a_{il}^{(ii)}e_{il}$。

引理 5：设 R 是一个 2-非挠的交换半环，δ 是 $M_n(R)$ 上的一个局部 Jordan 导子，那么存在一个可反矩阵 M，使得 $(\delta-adM)(e_{ii})=0, i=1,2,\cdots,n$。

证明：因为 $(e_{ii}+e_{jj})^2=e_{ii}+e_{jj}, \forall i\neq j$，所以由引理 2 可知：

$$\begin{aligned}&\delta(e_{ii}+e_{jj})\\&=\delta(e_{ii}+e_{jj})(e_{ii}+e_{jj})+(e_{ii}+e_{jj})\delta(e_{ii}+e_{jj})\\&=(\delta(e_{ii})+\delta(e_{jj}))(e_{ii}+e_{jj})+(e_{ii}+e_{jj})(\delta(e_{ii})+\delta(e_{jj}))\\&=\sum_{k=1,k\neq i}^{n}a_{ki}^{(ii)}e_{ki}+a_{ij}^{(ii)}e_{ij}+\sum_{k=1,k\neq j}^{n}a_{kj}^{(jj)}e_{kj}+a_{ji}^{(jj)}e_{ji}+a_{ij}^{(jj)}e_{ij}+\\&\quad\sum_{l=1,l\neq j}^{n}a_{jl}^{(jj)}e_{jl}+a_{ji}^{(ii)}e_{ji}+\sum_{l=1,l\neq i}^{n}a_{il}^{(ii)}e_{il},\end{aligned}$$

而 $\delta(e_{ii}+e_{jj})=\delta(e_{ii})+\delta(e_{jj})=\sum\limits_{k=1,k\neq i}^{n}a_{ki}^{(ii)}e_{ki}+\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{n}a_{kj}^{(jj)}e_{kj}+\sum\limits_{l=1,l\neq j}^{n}a_{jl}^{(jj)}e_{jl}+\sum\limits_{l=1,l\neq i}^{n}a_{il}^{(ii)}e_{il}$，

对比两式，可得 $a_{ij}^{(ii)}+a_{ij}^{(jj)}=(a_{ij}^{(ii)}+a_{ij}^{(jj)})+(a_{ij}^{(ii)}+a_{ij}^{(jj)})$，$a_{ji}^{(ii)}+a_{ji}^{(jj)}=(a_{ji}^{(ii)}+a_{ji}^{(jj)})+(a_{ji}^{(ii)}+a_{ji}^{(jj)})$，

由 R 的条件，可得：$a_{ij}^{(ii)}+a_{ij}^{(jj)}=0, a_{ji}^{(ii)}+a_{ji}^{(jj)}=0$。

因此，$a_{ij}^{(ii)}=-a_{ij}^{(jj)}, a_{ji}^{(jj)}=-a_{ji}^{(ii)}$。

可设可反矩阵 $M=\sum\limits_{1\leq k<l\leq n}a_{lk}^{(kk)}e_{lk}-\sum\limits_{1\leq k<l\leq n}a_{kl}^{(kk)}e_{kl}$，则：

$$\begin{aligned}&(\delta-adM)(e_{ii})\\&=\delta(e_{ii})-adM(e_{ii})=\delta(e_{ii})-(Me_{ii}-e_{ii}M)\\&=\delta(e_{ii})-(\sum_{l=i+1}^{n}a_{li}^{(ii)}e_{li}-\sum_{k=1}^{i-1}a_{ki}^{(kk)}e_{ki}-\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}^{(kk)}e_{ik}+\sum_{l=i+1}^{n}a_{il}^{(ii)}e_{il})\\&=\delta(e_{ii})-(\sum_{k=i+1}^{n}a_{ki}^{(ii)}e_{ki}-\sum_{k=1}^{i-1}a_{ki}^{(kk)}e_{ki}-\sum_{l=1}^{i-1}a_{il}^{(ll)}e_{il}+\sum_{l=i+1}^{n}a_{il}^{(ii)}e_{il})\\&=\delta(e_{ii})-(\sum_{k=i+1}^{n}a_{ki}^{(ii)}e_{ki}+\sum_{k=1}^{i-1}a_{ki}^{(ii)}e_{ki}+\sum_{l=1}^{i-1}a_{il}^{(ii)}e_{il}+\sum_{l=i+1}^{n}a_{il}^{(ii)}e_{il})\\&=\sum_{k=1,k\neq i}^{n}a_{ki}^{(ii)}e_{ki}+\sum_{l=1,l\neq i}^{n}a_{il}^{(ii)}e_{il}-(\sum_{k=1,k\neq i}^{n}a_{ki}^{(ii)}e_{ki}+\sum_{l=1,l\neq i}^{n}a_{il}^{(ii)}e_{il})\\&=0。\end{aligned}$$

引理 6：设 R 是一个 2-非挠的交换半环，且 R 中不存在非零的加法幂等元，δ 是 $M_n(R)$ 上的一个局部 Jordan 导子，如果 $\delta(e_{ii})=0$，$i=1, 2, \cdots, n$，那么存在一个 $b_{ij}\in R$，使得 $\delta(e_{ij})=b_{ij}e_{ij}$，$1\leq i\neq j\leq n$。

证明：因为 δ 是 $M_n(R)$ 上的一个局部 Jordan 导子，那么存在一个仅依靠于 e_{ij} 的 Jordan 导子 $\delta_{e_{ij}}$，使得 $\delta(e_{ij})=\delta_{e_{ij}}(e_{ij})$。

由引理 3，可设：$\delta(e_{ij})=\delta_{e_{ij}}(e_{ij})=\sum\limits_{k=1}^{n}b_{kj}e_{kj}+\sum\limits_{l=1,\ l\neq j}^{n}b_{il}e_{il}$。

因为 $(e_{ii}+e_{ij})^2=e_{ii}+e_{ij}$，所以由引理 2 可知：

$$\begin{aligned}&\delta(e_{ii}+e_{ij})\\&=\delta(e_{ii}+e_{ij})(e_{ii}+e_{ij})+(e_{ii}+e_{ij})\delta(e_{ii}+e_{ij})\\&=(\delta(e_{ii})+\delta(e_{ij}))(e_{ii}+e_{ij})+(e_{ii}+e_{ij})(\delta(e_{ii})\\&\quad+\delta(e_{ij}))\\&=\delta(e_{ij})(e_{ii}+e_{ij})+(e_{ii}+e_{ij})\delta(e_{ij})\\&=b_{ii}e_{ii}+b_{ii}e_{ij}+b_{ij}e_{ij}+\sum_{l=1,\ l\neq j}^{n}b_{il}e_{il}+b_{jj}e_{ij},\end{aligned}$$

而 $\delta(e_{ii}+e_{ij})=\delta(e_{ii})+\delta(e_{ij})=\delta(e_{ij})$，所以

$\delta(e_{ij})=b_{ii}e_{ii}+b_{ii}e_{ij}+b_{ij}e_{ij}+\sum_{l=1,\ l\neq j}^{n}b_{il}e_{il}+b_{jj}e_{jj}$。

对比等式两边，有：$b_{ii}e_{ii}=b_{ii}e_{ii}+b_{ii}e_{ii}$，再由 R 的条件，可得：$b_{ii}=0$，即 $\delta(e_{ij})=b_{ij}e_{ij}+\sum_{l=1,\ l\neq i,\ j}^{n}b_{il}e_{il}+b_{jj}e_{jj}$。

另一方面，又因为 $(e_{ij}+e_{jj})^2=e_{ij}+e_{jj}$，所以由引理 2 可知：

$\delta(e_{ij})$

$=\delta(e_{ij}+e_{jj})=\delta(e_{ij}+e_{jj})(e_{ij}+e_{jj})+(e_{ij}+e_{jj})\delta(e_{ij}+e_{jj})$

$=\delta(e_{ij})(e_{ij}+e_{jj})+(e_{ij}+e_{jj})\delta(e_{ij})$

$=b_{ij}e_{ij}+b_{jj}e_{jj}+b_{jj}e_{jj}+b_{jj}e_{ij}$，

对比等式两边，可得：$b_{jj}e_{jj}=b_{jj}e_{jj}+b_{jj}e_{jj}$，再由 R 的条件，有 $b_{jj}=0$。因此，$\delta(e_{ij})=b_{ij}e_{ij}$。

引理 7：设 R 是一个 2-非挠的交换半环，且 R 中不存在非零的加法幂等元，δ 是 $M_n(R)$ 上的一个局部 Jordan 导子，如果 $\delta(e_{ii})=0$，$i=1,2,\cdots,n$，那么存在一个可反矩阵 $D\in M_n(R)$，使得：

$(\delta-adD)(e_{i,\ i+1})=0$，$(\delta-adD)(e_{i+1,\ i})=0$，$1\leq i\leq n-1$，且 $(\delta-adD)(e_{ii})=0$，$1\leq i\leq n$。

证明：由引理 6，当 $\delta(e_{ii})=0$，$i=1,2,\cdots,n$ 时，$\delta(e_{ij})=b_{ij}e_{ij}$。

因为 $(e_{ij}+e_{ji})^3=e_{ij}+e_{ji}$，所以由引理 2（2），有：

$\delta(e_{ij}+e_{ji})$

$=\delta(e_{ij}+e_{ji})\cdot(e_{ij}+e_{ji})2+(e_{ij}+e_{ji})\cdot\delta(e_{ij}+e_{ji})\cdot(e_{ij}+e_{ji})+(e_{ij}+e_{ji})2\delta(e_{ij}+e_{ji})$

$=(\delta(e_{ij})+\delta(e_{ji}))\cdot(e_{ii}+e_{jj})+(e_{ij}+e_{ji})\cdot(\delta(e_{ij})+\delta(e_{ji}))\cdot(e_{ij}+e_{ji})+(e_{ii}+e_{jj})(\delta(e_{ij})+\delta(e_{ji}))$

$=(b_{ij}e_{ij}+b_{ji}e_{ji})\cdot(e_{ii}+e_{jj})+(e_{ij}+e_{ji})\cdot(b_{ij}e_{ij}+b_{ji}e_{ji})\cdot(e_{ij}+e_{ji})+(e_{ii}+e_{jj})(b_{ij}e_{ij}+b_{ji}e_{ji})$

$=b_{ji}e_{ji}+b_{ij}e_{ij}+(b_{ij}e_{ji}+b_{ji}e_{ij})+b_{ij}e_{ij}+b_{ji}e_{ji}$

$=(b_{ij}+b_{ji}+b_{ij})e_{ij}+(b_{ji}+b_{ij}+b_{ji})e_{ji}$

而 $\delta(e_{ij}+e_{ji})=\delta(e_{ij})+\delta(e_{ji})=b_{ij}e_{ij}+b_{ji}e_{ji}$，所以 $b_{ij}=b_{ij}+b_{ji}+b_{ij}$，$b_{ji}=b_{ji}+b_{ij}+b_{ji}$。

因此，$b_{ij}+b_{ji}=(b_{ij}+b_{ji}+b_{ij})+b_{ji}=(b_{ij}+b_{ji})+(b_{ij}+b_{ji})$，再由 R 的条件，可得：$b_{ij}+b_{ji}=0$。

所以，$b_{ji}=-b_{ij}$。

可设可反矩阵 $D=-diag(0,b_{12},b_{12}+b_{23},\cdots,b_{12}+b_{23}+\cdots+b_{n-1,\ n})$，则：

$(\delta-adD)(e_{ii})=0-(De_{ii}-e_{ii}D)=0$，$1\leq i\leq n$；

$(\delta-adD)(e_{i,\ i+1})=b_{i,\ i+1}e_{i,\ i+1}-(De_{i,\ i+1}-e_{i,\ i+1}D)$

$=b_{i,\ i+1}e_{i,\ i+1}+\sum_{l=1}^{i-1}b_{l,\ l+1}e_{i,\ i+1}-\sum_{l=1}^{i}b_{l,\ l+1}e_{i,\ i+1}=0$，$1\leq i\leq n$；

$(\delta-adD)(e_{i+1,i})=b_{i+1,i}e_{i+1,i}-(De_{i+1,i}-e_{i+1,i}D)$

$=-b_{i,i+1}e_{i+1,i}+\sum_{l=1}^{i}b_{l,l+1}e_{i+1,i}-\sum_{l=1}^{i-1}b_{l,l+1}e_{i+1,i}=0$，$1\leq i\leq n$。

引理 8：设 R 是一个 2-非挠的交换半环，且 R 中不存在非零的加法幂等元，δ 是 $M_n(R)$ 上的一个局部 Jordan 导子，如果 $\delta(e_{i,\ i+1})=0$，$\delta(e_{i+1,\ i})=0$，$1\leq i\leq n-1$，且 $\delta(e_{ii})=0$，$1\leq i\leq n$，那么：

$\delta(e_{i,\ i+k})=0$，$\delta(e_{i+k,\ i})=0$，$\forall e_{i,\ i+k}$，$e_{i+k,\ i}\in M_n(R)$。

证明：由引理 6，当 $\delta(e_{ii})=0$，$i=1,2,\cdots,n$ 时，$\delta(e_{ij})=b_{ij}e_{ij}$。

当 $k=2$ 时，因为

$(e_{i,\ i+1}+e_{i+1,\ i+2}+e_{i,\ i+2}+e_{i+1,\ i+1})^2=e_{i,\ i+1}+e_{i+1,\ i+2}+e_{i,\ i+2}+e_{i+1,\ i+1}$，所以：

$\delta(e_{i,\ i+1}+e_{i+1,\ i+2}+e_{i,\ i+2}+e_{i+1,\ i+1})$

$=\delta(e_{i,\ i+1}+e_{i+1,\ i+2}+e_{i,\ i+2}+e_{i+1,\ i+1})\cdot(e_{i,\ i+1}+e_{i+1,\ i+2}+e_{i,\ i+2}+e_{i+1,\ i+1})+(e_{i,\ i+1}+e_{i+1,\ i+2}+e_{i,\ i+2}+e_{i+1,\ i+1})\cdot\delta(e_{i,\ i+1}+e_{i+1,\ i+2}+e_{i,\ i+2}+e_{i+1,\ i+1})$

$=\delta(e_{i,\ i+2})\cdot(e_{i,\ i+1}+e_{i+1,\ i+2}+e_{i,\ i+2}+e_{i+1,\ i+1})+(e_{i,\ i+1}+e_{i+1,\ i+2}+e_{i,\ i+2}+e_{i+1,\ i+1})\cdot\delta(e_{i,\ i+2})$

$=b_{i,\ i+2}e_{i,\ i+2}\cdot(e_{i,\ i+1}+e_{i+1,\ i+2}+e_{i,\ i+2}+e_{i+1,\ i+1})+(e_{i,\ i+1}+e_{i+1,\ i+2}+e_{i,\ i+2}+e_{i+1,\ i+1})\cdot b_{i,\ i+2}e_{i,\ i+2}=0$，

而 $\delta(e_{i,\ i+1}+e_{i+1,\ i+2}+e_{i,\ i+2}+e_{i+1,\ i+1})=\delta(e_{i,\ i+1})+\delta(e_{i+1,\ i+2})+\delta(e_{i,\ i+2})+\delta(e_{i+1,\ i+1})=\delta(e_{i,\ i+2})$，因此，$\delta(e_{i,\ i+2})=0$。

类似的，由 $(e_{i+1,\ i}+e_{i+2,\ i+1}+e_{i+2,\ i}+e_{i+1,\ i+1})^2$

$= e_{i+1,\, i} + e_{i+2,\, i+1} + e_{i+2,\, i} + e_{i+1,\, i+1}$ 可得：$\delta(e_{i+2,\, i}) = 0$。

假设 $\delta(e_{i,\, i+m}) = 0$，$\delta(e_{i+m,\, i}) = 0$，$m = 2, 3, \cdots, k-1$。

因为 $e_{i,\, i+1} + e_{i+1,\, i+k} + e_{i,\, i+k} + e_{i+1,\, i+1}$ 与 $e_{i+1,\, i} + e_{i+k,\, i+1} + e_{i+k,\, i} + e_{i+1,\, i+1}$ 均为幂等元，所以类似于 $k = 2$，经计算可得：$\delta(e_{i,\, i+k}) = 0$，$\delta(e_{i+k,\, i}) = 0$。

因此，由数学归纳法可知：$\delta(e_{i,i+k}) = 0$，$\delta(e_{i+k,i}) = 0$，$\forall e_{i,i+k}, e_{i+k,i} \in M_n(R)$，即 $\delta(e_{ij}) = 0$。

定理 1：设 R 是一个 2-非挠的交换半环，且 R 中不存在非零的加法幂等元，那么 $M_n(R)$ 上的每个局部 Jordan 导子都是内导子。

证明：令 δ 是 $M_n(R)$ 上的一个局部 Jordan 导子，那么由引理 4 到引理 8 可得：存在可反矩阵 $M, D \in M_n(R)$，使得 $(\delta - adM - adD)(e_{ij}) = 0$，$1 \le i, j \le n$。也就是说 $\delta = adM + adD = ad(M + D)$，所以 δ 是 $M_n(R)$ 上的一个内导子。

参考文献：

[1] ZHAO Y X. Jordan derivations and local Jordan derivations on full matrix algebras over commutative rings [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis，2014，47 (6)：98-104.

[2] GOLAN J S. Semirings and their applications [M]. London：Kluwer Academic Publisher，1999.

[3] 陈培慈. 半环理论与语言和自动机 [M]. 南昌：江西高校出版社，1993.

[4] 庄金洪. 交换半环上全矩阵代数的 Jordan 导子 [J]. 龙岩学院学报，2017，35 (2)：35-39.

On Local Jordan Derivations of Full Matrix Algebra over Commutative Semirings

ZHUANG Jinhong

(Foundation Section，Fujian Business University，Fuzhou 350012，China)

Abstract: This paper explores the local Jordan derivations of full matrix algebra over commutative semirings. Suppose R is a 2-torsion free commutative semiring with identity 1，$M_n(R)$ is the algebra consisting of all n by n matrices over R，it proves that every local Jordan derivation of $M_n(R)$ is an inner derivation.

Key words: commutative semiring; full matrix algebra; Jordan derivation; local Jordan derivation; inner derivation

(责任编辑：杨成平)